10 μ VE λ ARASINDAKİ BAĞLANTI

$\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ olduğu için düzlem ölçüsü ile doğrusal ölçü arasında doğal bir ilişki vardır. Bu bölümde, bu bağlantı incelenecek ve genel çarpım ölçülerinin inşasına göz atılacaktır.

Teorem 1: A ve B, $\mathbb{R}$'nin sonlu dış ölçüye sahip (ölçülebilir olmaları gerekmiyor) alt kümeleri ise

$$\lambda(A\times B)\le \mu(A)\mu(B)$$

dir.

Kanıt: $\varepsilon>0$ sayısı verilsin ve $\{I_j\}$, $\{J_k\}$ A ve B'yi örten ve

$$\sum l(I_j)<\mu(A)+\varepsilon \quad , \quad \sum l(J_k)<\mu(B)+\varepsilon$$

şartlarını sağlayan aralıklar olsunlar. $\{I_j\times J_k\}$, $A\times B$'yi örten dikdörtgenler olduğundan

$$\lambda(A\times B)\le \sum_{j,k}\alpha(I_j\times J_k)=\sum_j l(I_j)\sum_k l(J_k)$$

$$<(\mu(A)+\varepsilon)\,(\mu(B)+\varepsilon)$$

dir. Her $\varepsilon>0$ için bu eşitsizlik sağlandığından ve $\mu(A)$, $\mu(B)$ sonlu olduklarından

$$\lambda(A\times B)\le\mu(A)\mu(B)$$

dir. ■

Problem 1: $\mu(A)=0$ olmak üzere A, B, $\mathbb{R}$'nin alt kümeleri olsunlar. $\lambda(A\times B)=0$ olduğunu gösteriniz.

Teorem 2: A ve B, $\mathbb{R}$'nin kompakt alt kümeleri ise

$$\lambda(A\times B)=\mu(A)\mu(B)$$

dir.

Teorem 3: A ve B, $\mathbb{R}$'nin ölçülebilir alt kümeleri ise

$$\lambda(A\times B)=\mu(A)\mu(B)$$

dir.

Kanıt: Önce A ve B'nin sonlu ölçülü olduklarını düşünelim. Bu durumda $F \subset A$, $G \subset B$ ve

$$\mu(A) - \varepsilon < \mu(F), \quad \mu(B) - \varepsilon < \mu(G)$$

olacak şekilde F ve G kompakt kümeleri vardır. Buna göre

$$\mu(A)\mu(B) \geq \lambda(A \times B) \geq \lambda(F \times G) = \mu(F)\mu(G) > (\mu(A) - \varepsilon)(\mu(B) - \varepsilon)$$

dir. ε'nun keyfiliğinden, $\lambda(A \times B) = \mu(A)\mu(B)$ eşitliğini elde ederiz.

$\mu(A) = \infty$ veya $\mu(B) = \infty$ ise iki durumu düşünürüz: i) $\mu(A) = \infty$ ve $0 < \mu(B) < \infty$, bu durumda $\mu(A)\mu(B) = \infty$ ve ii) $\mu(A) = \infty$ ve $\mu(B) = 0$, bu durumda $\mu(A)\mu(B) = 0$. i) durumunda, her n için $\mu(F) > n$ olacak şekilde bir $F \subset A$ kompakt kümesi vardır. Bu yüzden, her n için

$$\lambda(A \times B) \geq \lambda(F \times B) = \mu(F)\mu(B) > n\mu(B)$$

dir. Dolayısıyla $\lambda(A \times B) = \infty = \mu(A)\mu(B)$ dir. Eğer $\mu(A) = \mu(B) = \infty$ ise $\lambda(A \times B) = \infty$ olacağı açıktır. ii) durumunda, $-\infty < n < \infty$ için $A_n = A \cap [n, n+1)$ olsun. Böylece $\mu(A_n) < \infty$ ve

$$\lambda(A \times B) \leq \sum \lambda(A_n \times B) = \sum \mu(A_n)\mu(B) = 0$$

olduğundan $\lambda(A \times B) = 0 = \mu(A)\mu(B)$ dir. ■

Teorem 4: A ve B, $\mathbb{R}$'nin ölçülebilir alt kümeleri ise $A \times B$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$'nin ölçülebilir bir alt kümesidir.

Kanıt: Bölüm 9, Teorem 3'den dolayı, her $R = I \times J$ dikdörtgeni için

$$\lambda((A \times B) \cap R) + \lambda((A \times B)' \cap R) \leq \lambda(R)$$

olduğunu göstermemiz, kanıt için yeterlidir. A ve B ölçülebilir olduğundan

$$\mu(A \cap I) + \mu(A' \cap I) = \mu(I) \quad \text{ve} \quad \mu(B \cap J) + \mu(B' \cap J) = \mu(J)$$

dir. $\lambda(R) = \mu(I)\mu(J)$ olduğu için

$$\lambda(R) = [\mu(A \cap I) + \mu(A' \cap I)][\mu(B \cap J) + \mu(B' \cap J)]$$
$$= \mu(A \cap I)\mu(B \cap J) + \mu(A \cap I)\mu(B' \cap J) + \mu(A' \cap I)\mu(B \cap J) + \mu(A' \cap I)\mu(B' \cap J)$$

$R_1=(A\cap I)\times(B\cap J)=(A\times B)\cap R$ $\quad R_2=(A\cap I)\times(B'\cap J)$

$R_3=(A'\cap I)\times(B\cap J)$ $\quad R_4=(A'\cap I)\times(B'\cap J)$

denirse, R_1, R_2, R_3 ve R_4 ayrık ve bileşimleri R dir. $R_2\cup R_3\cup R_4=(A\times B)'\cap R$ dir. Teorem 1'den

$$\mu(A\cap I)\mu(B\cap J)\geq \lambda[(A\cap I)\times(B\cap J)]=\lambda[(A\times B)\cap R]$$

eşitsizliğini elde ederiz. Benzer eşitsizlikleri, R_1'in yerine R_2, R_3 ve R_4 koyarak da elde ederiz. Buna göre

$$\lambda(R)\geq\lambda[(A\times B)\cap R]+\lambda(R_2)+\lambda(R_3)+\lambda(R_4)$$
$$\geq\lambda[(A\times B)\cap R]+\lambda[(A\times B)'\cap R]$$

dır. ■

Ölçü teoresinde, genel çalışma, bir X kümesinin alt kümelerinin σ-cebri ve bu özel "ölçülebilir kümeler" üzerinde sayılabilir toplamsal ν ölçü fonksiyonu ile başlar. $X\times X$ üzerinde $\nu\times\nu$ çarpım ölçüsünü tanımlamak için, A ve B, X'in ölçülebilir alt kümeleri olmak üzere $A\times B$ formundaki temel kümeler ile işe başlanır. Böyle kümelerin çarpım ölçüsü tabi ki $\nu\times\nu(A\times B)=\nu(A)\nu(B)$ dir.

Bizim düzlem ölçüsü λ, başta öyle tanımlamamamıza rağmen, tabi ki $\mu\times\mu$ çarpım ölçüsünün aynısıdır. Doğrusal ölçüye bağımlı olsun olmasın gerçek bir dikdörtgenin alanına dayanan temel sezgisel bir düşünce ile işe başlanılmıştır. Bu yüzden, düzlem kümeleri üzerinde λ'yı tanımlarken temel kavram olarak $\alpha(I\times J)=\iota(I)\iota(J)$ kullanıldı. Bu işlem, daha temel kavramlar ile dış ölçünün nasıl tanımlanacağına ikinci örnek teşkil etmiştir. Aşağıdaki teorem, λ'nın tanımını A ve B'yi aralıklardan daha farklı olarak ölçülebilir kümeler aldığımızda $\lambda(A\times B)=\mu(A)\mu(B)$ ile tanımlayacağımızı göstermektedir.

Teorem 5: Herhangi $E \subset \mathbb{R}^2$ kümesi için

$$\lambda(E) = \inf\{\sum \lambda(A_i \times B_i) \mid E \subset \bigcup (A_i \times B_i)\}$$
$$= \inf\{\sum \mu(A_i)\mu(B_i) \mid E \subset \bigcup (A_i \times B_i)\}$$

dir. Burada $\{A_i\}$ ve $\{B_i\}$, $\mathbb{R}^1$'nin ölçülebilir alt kümelerinin sayılabilir aileleridir.

Kanıt: Eşitliğin sağ tarafını $\lambda_M(E)$ ile gösterelim. Yani $\lambda_M(E)$, $I \times J$ dikdörtgenlerinden daha fazla $A \times B$ ölçülebilir kümeleri ile başlayan, E'nin dış ölçüsü olacaktır. E'yi kapsayan daha fazla aileler olduğundan ve inf tanımından $\lambda_M(E) \leq \lambda(E)$ eşitsizliği açıktır. Diğer taraftan, $E \subset \bigcup A_i \times B_i$ olduğundan Teorem 3 ve yarı-toplamsallık kullanılırsa

$$\lambda(E) \leq \sum \lambda(A_i \times B_i) = \sum \mu(A_i)\mu(B_i)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Yani $\lambda(E) \leq \lambda_M(E)$ ve sonuçta $\lambda(E) = \lambda_M(E)$ dir. ■

Sonuç olarak, bu bölümde şunu elde ettik:

1) A ve B, $\mathbb{R}^1$'nin ölçülebilir alt kümeleri ise $A \times B$, $\mathbb{R}^2$'nin ölçülebilir bir alt kümesidir ve $\lambda(A \times B) = \mu(A)\mu(B)$ dir.

2) $E \subset \mathbb{R}^2$ ise $\lambda(E) = \inf\{\sum \mu(A_i)\mu(B_i) \mid E \subset \bigcup (A_i \times B_i)\}$ dir, burada $\{A_i\}$ ve $\{B_i\}$, $\mathbb{R}^1$'nin ölçülebilir alt kümelerinin sayılabilir aileleridir.